Pensando alla matematica*. Parte seconda

Matej Brešar

Although we all come across mathematics, there is an air of mystery surrounding it. What is its meaning and importance? Why do mathematicians think about it as an art form? And what do they actually do? This text addresses these questions and seeks to open the door to the world of mathematics and mathematicians.
Keywords: *Mathematics*, *Mathematical thinking*

Numeri primi e atemporalità

Quando noi matematici cerchiamo di convincere un profano di matematica che la matematica è interessante e bella, spesso ci troviamo in difficoltà. È difficile fare esempi appropriati. La matematica si occupa di concetti astratti cui diamo determinati nomi. Senza familiarità con questi nomi, la conversazione è impossibile. In realtà, la sola familiarità non è sufficiente. Possiamo discutere di questi concetti se li comprendiamo davvero bene, e ciò richiede anni di studio.

Ma lasciatemi provare lo stesso. Sceglierò un argomento che, evitando i dettagli, si spera possa essere presentato in modo sia facile da capire sia matematicamente profondo: i numeri primi.

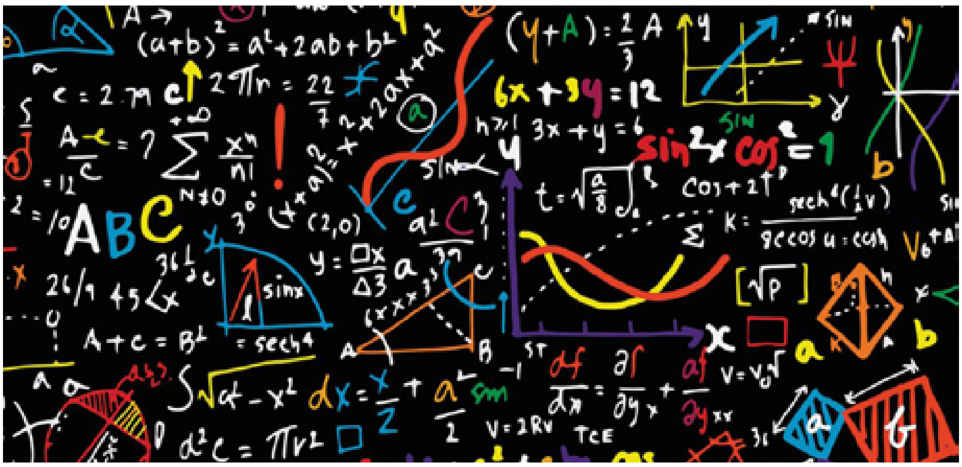
Definizione. Un numero naturale $p > 1$ è un numero primo se è divisibile solo per 1 e per se stesso.

Ad esempio, 2 e 3 sono numeri primi, ma 4 non lo è perché è divisibile per 2. I numeri primi sono gli elementi costitutivi dei numeri interi. Ad eccezione di 1, ogni numero naturale è il prodotto di numeri primi. Ad esempio, $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, ecc. Per convenzione, diciamo anche che ogni primo p è uguale al prodotto dei fattori primi. Tuttavia in questo prodotto c'è un solo fattore, il numero p stesso.

Scriviamo il fatto sopra citato come teorema e dimostriamolo.

Teorema. Ogni numero naturale, tranne 1, è un prodotto di numeri primi.

Dimostrazione. Supponiamo che non sia vero. Allora esisterebbero numeri naturali diversi da 1 che non possono essere scritti come prodotti di numeri



* Questo testo è apparso originariamente in *Nastopna predavanja 2015 in 2017, Slovenska akademija znanosti in umetnosti*, Ljubljana, 2019. La traduzione è stata curata da Fabio Fantini insieme allo stesso Autore, con la supervisione di Antonio Ioppolo.

primi. Sia n il più piccolo di tali numeri.
Tutti i numeri minori di n e maggiori di 1 possono quindi essere presentati come prodotto di primi, ma non n. Ciò significa, tra l'altro, che n non è un primo. Pertanto può essere scritto come $n = r \cdot s$, dove r e s sono numeri naturali diversi da 1 e da n. Poiché entrambi sono minori di n, per ipotesi ciascuno di essi è uguale al prodotto di primi. Ma allora anche n è il prodotto di primi - anzi, è il prodotto di quei primi che si trovano nelle fattorizzazioni di r e s. Siamo arrivati a una contraddizione. Abbiamo ipotizzato che n non sia un prodotto di primi, ma ora siamo arrivati a una tale fattorizzazione. Questa contraddizione deriva dall'ipotesi iniziale che alcuni numeri naturali diversi da 1 non possono essere scritti come prodotti di primi. Pertanto, non esistono tali numeri e il teorema è dimostrato.
Questo teorema è semplice. Chiunque abbia una certa affinità con la matematica può trovare almeno un'interpretazione intuitiva della sua correttezza, se non una dimostrazione rigorosa. Il teorema seguente è più profondo.
Teorema. Esistono infiniti numeri primi.
Dimostrazione. Supponiamo che esista solo un numero finito di numeri primi. Denotando il loro numero con n, possiamo allora indicare i soli primi con $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (per esempio, possiamo prendere $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ecc. ma l'ordine di $p_1, p_2, \ldots p_n$ non è rilevante ai fini della prova). Consideriamo il prodotto di tutti i numeri primi a cui aggiungiamo 1, cioè il numero $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Per il teorema precedente, il numero N è uguale al prodotto di alcuni primi. Pertanto, esiste un primo p_j che lo divide. Quindi, $N = qp_j$ per qualche numero naturale q, e quindi $qp_j = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.Osserviamo che questo può essere scritto come

$$(q - p_1 p_2 \ldots p_{j-1} p_{j+1} \ldots p_n) p_j = 1.$$

Ma il prodotto di un numero intero per un numero primo non può essere uguale a 1! L'ipotesi che esista solo un numero finito di primi ci ha portato a una contraddizione. Pertanto, esistono infiniti numeri primi.
La dimostrazione è tratta dal libro di Euclide *Gli elementi*, scritto circa nel 300 a. C. È stata solo tradotta in un linguaggio matematico più moderno, per il resto è rimasta invariata. E insuperata. Cosa rimane immutato e insuperato dopo migliaia di anni? La matematica di prima qualità è senza tempo, immortale, mentre la buona matematica invecchia molto lentamente.
Lasciate che vi spieghi cosa intendo quando dico che la dimostrazione di Euclide è insuperata. Anche se nel corso degli anni sono state scoperte numerose nuove dimostrazioni, è ancora la dimostrazione classica di Euclide quella che presentiamo agli studenti. Alcune delle nuove dimostrazioni sono davvero belle e sorprendenti. Ma nessuna è semplice come quella di Euclide. In matematica, la semplicità è un valore. Semplicità, chiarezza, comprensibilità. Questi sono gli obiettivi della matematica. La matematica non è complicata. È il nostro mondo che è complicato.
La comprensione dei numeri primi è una sfida eterna della matematica. Esistono ancora molti vecchi problemi sui numeri primi, facili da enunciare ma rimasti irrisolti. Ne cito due. La congettura di Goldbach del 1742 propone che, ad eccezione del numero 2, ogni numero naturale pari sia la somma di due primi. (Il lettore può verificare la correttezza della congettura per alcuni piccoli numeri pari). Il secondo famoso problema chiede se esistono infiniti numeri primi gemelli, cioè coppie di numeri primi che differiscono di 2 (esempi di numeri primi gemelli sono 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, ecc.) Recentemente sono stati fatti importanti progressi su questa congettura.
Forse uno di questi due problemi sarà risolto durante la nostra vita. O almeno prima che noi umani distruggiamo il mondo.
Lo studio dei numeri primi è un tema classico della matematica pura. È la matematica più pura che non ha pretesa di essere utile al di fuori della matematica. Tuttavia, i risultati sui numeri primi si sono rivelati utili nella crittografia dell'era moderna. Si tratta della scienza che si occupa della trasmissione sicura di messaggi dal mittente al destinatario (come ad esempio l'*online banking*). Uno dei primi metodi crittografici veramente efficaci si basa sul cosiddetto Piccolo Teorema di Fermat. Pierre de Fermat (1607-1665) era un avvocato francese che si occupava di matemati-

ca per hobby. Il Piccolo Teorema di Fermat afferma che il numero a^p-a è divisibile per p per ogni numero intero a e per ogni numero primo p. Immaginiamo un avvocato del XVII secolo, matematico per passione, magari seduto a lume di candela mentre si diverte con considerazioni apparentemente senza scopo sui numeri. E poi, nel XX secolo, una delle sue scoperte viene ampiamente utilizzata in Internet e in altre meraviglie del mondo moderno. Sembra incredibile! Questo non è affatto l'unico esempio di utilizzo della matematica pura nella tecnologia. Basti pensare che i motori di ricerca sul web si basano sui risultati teorici dell'algebra lineare. Tuttavia, ogni medaglia ha due facce. La crittografia è utilizzata anche nell'industria militare. Anche l'accessibilità delle informazioni sul web è un'arma a doppio taglio. La matematica pura può involontariamente portare molto di buono, così come può portare, sempre involontariamente, qualcosa di cattivo.

Lo sviluppo dell'algebra e l'importanza dei concetti matematici astratti

La matematica si occupa di concetti astratti. Un esempio semplice è il concetto di numero.

Tutti noi ne comprendiamo il significato e quindi lo accettiamo. La maggior parte dei concetti matematici sono molto più difficili da capire e quindi è difficile apprezzarli immediatamente. Possono persino suscitare avversione, perché sembrano troppo lontani dal nostro mondo. Tuttavia, questi concetti sono l'essenza della matematica.

Uno dei campi fondamentali della matematica è l'algebra. Ne traccerò brevemente lo sviluppo storico e attraverso questo cercherò di indicare l'importanza dei concetti matematici astratti.

Fino al XIX secolo, l'algebra significava solo lo studio di equazioni polinomiali di basso grado.

L'equazione lineare $ax + b = 0$

ha come soluzione $x = - b/a$

e la soluzione dell'equazione quadratica è, come abbiamo imparato a scuola,

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Questa scoperta era già nota a diverse antiche civiltà. Gli antichi Babilonesi, per esempio, lo sapevano già circa 1700 anni a.C. La loro soluzione era essenzialmente uguale alla nostra, anche se espressa solo attraverso semplici esempi concreti. La soluzione dell'equazione cubica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

è stata scoperta più di tre millenni dopo, durante il Rinascimento. La chiave è un caso speciale di questa equazione, che ha come soluzione

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

L'equazione cubica generale, così come l'equazione quartica generale, possono essere ridotte a questo caso speciale. Ciò è stato scoperto dai matematici italiani nel XVI secolo. La soluzione è documentata nel libro di Gerolamo Cardano intitolato *Ars magna* del 1545. A quei tempi, i matematici non pubblicavano i loro risultati, ma competevano tra loro per ottenere denaro. I risultati del libro di Cardano in realtà non sono suoi. Inoltre, Cardano non mantenne la promessa fatta al matematico Niccolò Fontana Tartaglia di non divulgare i suoi risultati a nessuno. Ma la storia a volte è capricciosa: le formule per risolvere l'equazione cubica e quartica sono oggi intitolate a Cardano.

Va detto che all'epoca di Cardano non esisteva il concetto di numero come lo conosciamo oggi. Né esisteva la notazione simbolica che oggi usiamo per scrivere le equazioni. Tutto era espresso a parole. Oggi presentare i nostri risultati è incomparabilmente più facile. In generale, la notazione simbolica svolge un ruolo estremamente importante in matematica. Tra le altre cose, orienta il nostro modo di pensare. Fa parte della scienza matematica introdurre la notazione che meglio descrive l'essenza del concetto in esame.

Dopo il successo dei matematici italiani, la sfida successiva fu l'equazione quintica:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

Ci si aspetterebbe che le soluzioni possano essere espresse con una formula simile a quella delle

equazioni di grado inferiore, tranne per il fatto che includerebbero anche una radice quinta. La formula ricercata sarebbe probabilmente solo più complessa e quindi più difficile da scoprire. Ma si è scoperto qualcosa di molto più interessante: la formula non esiste! Le soluzioni esistono, infatti il Teorema fondamentale dell'algebra afferma che ogni equazione polinomiale (di grado almeno 1) ha delle soluzioni (che possono essere complesse, non necessariamente numeri reali). Tuttavia, esse non possono essere espresse con una formula. Questo è stato dimostrato nel 1824 dal matematico norvegese Niels Henrik Abel (1802-1829) (e anche prima dal matematico italiano Paolo Ruffini, ma la sua dimostrazione era incompleta). È stato necessario un salto mentale per accettare la possibilità che la formula non possa esistere. Non è vero che non siamo riusciti a risolvere un problema perché non siamo abbastanza capaci o diligenti. Il problema semplicemente non è risolvibile.
I problemi che noi matematici affrontiamo di solito hanno solo due risposte possibili: "sì" e "no". Ci accontentiamo di una delle due. A volte la risposta "no" è più eccitante perché solleva nuove domande. Per inciso, ricordiamo che Abel inizialmente pensava di aver trovato la formula per la soluzione dell'equazione quintica, ma dopo qualche tempo si rese conto che la sua dimostrazione era sbagliata. Quando noi matematici cerchiamo di risolvere un problema, a volte commettiamo errori e il nostro ragionamento è spesso più intuitivo che razionale. Utilizziamo il ragionamento puramente logico, così caratteristico della matematica, solo quando ci troviamo di fronte ai dettagli delle dimostrazioni.
Come possiamo sapere che non esiste una formula per la soluzione di un'equazione quintica?
Si può rispondere più facilmente descrivendo la scoperta fatta dal matematico francese Evariste Galois (1811-1832) qualche anno dopo Abel. Egli dimostrò che esistono equazioni polinomiali di quinto grado e di grado superiore, le cui soluzioni non sono espresse dai coefficienti dell'equazione (cioè dai numeri a, b, c, . . .) mediante addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e radici ennesime. Pertanto non può esistere nemmeno la formula che stiamo cercando. Il lavoro di Galois ha posto una pietra miliare nello sviluppo della matematica. Non solo per i risultati, ma soprattutto per il metodo di soluzione.
Galois introdusse il seguente concetto, che lo aiutò a risolvere il problema.
Definizione. Sia G un insieme non vuoto. Supponiamo che per ogni coppia di elementi x e y in G esista un unico elemento $x * y$ in G (in questo caso diciamo che G è dotato dell'operazione binaria $*$). Diciamo che G, insieme all'operazione binaria $*$, è un gruppo se sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:

(I) $(x * y) * z = x * (y * z)$ per tutti gli $x, y, z \in G$,
(II) G contiene un elemento e tale che $e * x = x * e = x$ per tutti gli $x \in G$,
(III) per ogni $x \in G$ esiste un $x' \in G$ tale che $x * x' = x' * x = e$.

(La definizione di Galois era in realtà meno astratta, ma sostanzialmente equivalente a questa).
Questa nozione è difficile da comprendere senza una spiegazione dettagliata. Tuttavia, lo scopo di questo articolo non è l'educazione matematica. Ho scritto la definizione di gruppo in un linguaggio esatto solo per dare un'impressione al lettore. Per comodità, mi limito a due semplici esempi. L'insieme dei numeri reali è un gruppo sotto l'operazione di addizione (cioè, $x * y$ significa $x + y$). Qui e è il numero 0 e x' è uguale a $-x$. L'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un gruppo sotto l'operazione di moltiplicazione (per esempio $x * y = x \bullet y$). Qui $e = 1$ e $x' = 1/x$. È certamente sorprendente che, per risolvere un problema molto concreto (un'equazione di quinto grado!), Galois abbia introdotto un concetto così astratto. Ancora più sorprendente è l'ulteriore sviluppo della nozione di gruppo. Il lavoro di Galois è stato pubblicato e riconosciuto solo diversi anni dopo la sua morte. Nel corso del tempo, i matematici hanno iniziato a notare che numerosi esempi diversi di gruppi appaiono in diverse aree della matematica. In effetti, i gruppi si incontrano ovunque in matematica e anche in fisica. I matematici hanno quindi iniziato a con-

siderare i gruppi come interessanti di per sé, e non solo come uno strumento per risolvere problemi concreti. Sono stati introdotti alcuni concetti legati ai gruppi, come gli anelli, i campi e gli spazi vettoriali. L'algebra moderna è dedicata allo studio di questi concetti astratti. Sono state sviluppate numerose teorie algebriche che si sono rivelate utili in altre aree della matematica e anche al di fuori di essa. Vorrei citare solo un esempio classico. Fino al XIX secolo, tre famosi problemi geometrici dell'antichità erano aperti. Sono noti come il raddoppio del cubo (è possibile, utilizzando solo riga e compasso, costruire un cubo che abbia il doppio del volume di un cubo dato?), la trisezione di un angolo (è possibile, utilizzando solo riga e compasso, costruire un angolo pari a un terzo di un angolo dato?) e la quadratura del cerchio (è possibile, utilizzando solo riga e compasso, costruire un quadrato che abbia la stessa area di un cerchio dato?). La risposta a tutte e tre le domande è "no" e il modo per arrivarci è attraverso concetti algebrici. Le dimostrazioni non sono nemmeno così complicate. Oggi è difficile capire perché ci sia voluto così tanto tempo per trovare soluzioni a questi problemi. Credo che la ragione risieda nel potere dei concetti matematici astratti, profondi e ben concepiti. Essi ci guidano verso un punto di vista dal quale possiamo vedere come affrontare un problema concreto.

Inseguire un'idea

Il lettore può essere stato colpito dagli anni di nascita e di morte di Abel e Galois. Giovani uomini poco più che ventenni hanno cambiato il corso della storia della matematica. Il motivo della morte prematura di Abel fu una malattia, mentre Galois morì in un duello.

La gioventù è un grande vantaggio in matematica. Ci sono eccezioni, ma la maggior parte dei matematici produce i risultati migliori in età relativamente giovane. Perché? Naturalmente la gioventù ha alcuni vantaggi evidenti, come la freschezza e l'impavidità. D'altra parte, con il passare degli anni si acquisisce esperienza, ma non si perde arguzia. Perché in matematica la conoscenza e l'esperienza non sono così essenziali come in molti altri settori? A mio avviso, una delle ragioni più importanti è il modo di lavorare. Per molti aspetti, il lavoro di ricerca di un matematico non è molto faticoso. A differenza delle gare di matematica, non è così importante se si è veloci o meno nel pensare. Non c'è pressione sul tempo, tutto procede lentamente. Quindi sarebbe difficile dire che essere un matematico è stressante. Ma può essere molto frustrante. Quando si affronta un problema, bisogna prima trovare un'idea innovativa. E questo può richiedere tempo... e ancora tempo. Per un lungo periodo non succede nulla. Si gira in tondo. Passano i giorni, le settimane e i mesi. Il risultato: niente! Dopo un po', questo diventa un peso. Il costruttore ha costruito, il fornaio ha sfornato, il guaritore ha guarito, e voi che cosa avete fatto oggi? Niente! Sono utile? Sono ancora in grado di fare qualcosa? L'ultimo risultato decente è alle mie spalle? La ricerca di un'idea innovativa è di solito un'impresa solitaria. Nessuno può farlo per voi. E in matematica non ci sono esperimenti. L'unica cosa che abbiamo è il pensiero. Il matematico porta quindi sempre con sé il suo "laboratorio" e non può spegnerlo nemmeno se volesse. Lunedì mattina o sabato sera? Non importa, solo quando si ha qualcosa in mente. Questo modo di lavorare, anzi di vivere, può essere mentalmente estenuante. È molto più facile da sopportare in giovane età.

E poi, a volte, arriva. Un'idea rivoluzionaria. Così, senza essere invitata. Al mattino, nel cuore della notte, durante una passeggiata, un viaggio in auto, in una sala d'attesa... Come se il suo arrivo non avesse nulla a che fare con i vostri sforzi durati settimane, mesi, a volte persino anni. Per un attimo vi sembra di aver toccato qualcosa che è al di là di voi e al di sopra di voi, quindi non lo meritate. Il costruttore ha costruito la casa, ma la vostra casa è apparsa proprio davanti a voi. Come un dono del cielo. La sensazione di gioia è indescrivibile. Improvvisamente siete il calciatore che ha segnato il gol, vi rotolate sull'erba e tutto lo stadio esulta. Non importa che in quello "stadio" ci sia in realtà una sola persona: voi stessi. Vi è stato regalato un momento di euforia, godetevelo!

L'idea rivoluzionaria è seguita da un periodo felice di perfezionamento delle dimostrazioni, di ricerca di esempi illustrativi e di applicazioni dei risultati principali. Quando ci si sveglia al mattino, si sa esattamente cosa si farà e non si vede l'ora di iniziare la giornata. Alla fine si scrive tutto con cura e il progetto è completo. Quindi si passa a un nuovo problema. Forse ne uscirà qualcosa. Ma forse no...

La matematica oggi

Come altre scienze, anche la matematica si è molto diversificata nel XX secolo. Cent'anni fa, alcuni matematici avevano una visione d'insieme di tutta la matematica. Oggi non ce ne sono più. Stanno emergendo nuove teorie matematiche per risolvere problemi che un tempo sembravano inaccessibili. Un bellissimo esempio della potenza della matematica moderna è la dimostrazione dell'ultimo teorema di Fermat. È una delle storie matematiche più famose. Lasciate che ve la descriva brevemente.

Sia $n \geq 2$ un numero naturale. Esistono numeri naturali a, b e c tali che $a^n + b^n = c^n$?

Per $n = 2$, la risposta è ovviamente "sì". Le soluzioni si chiamano terne pitagoriche; un semplice esempio sono i numeri $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$. Pierre de Fermat, che abbiamo già citato in precedenza, nel 1637 scrisse a margine del libro *Arithmetica* di Diofanto di avere scoperto una meravigliosa dimostrazione che per qualsiasi $n \geq 3$ non esistono tali numeri naturali a, b, c, ma non c'era abbastanza spazio a margine per scriverla. L'affermazione di Fermat divenne nota come Ultimo Teorema di Fermat. Fermat si sbagliava quasi certamente sulla correttezza della sua dimostrazione, anche se ovviamente non sapremo mai la verità. Il problema della verità di questo teorema è rimasto aperto per più di 350 anni. È stato affrontato da molti dei più grandi matematici ed era anche popolare tra i dilettanti di matematica, poiché sembrava che bastasse un lampo di genio per risolverlo. Solo nel 1995, il matematico inglese Andrew Wiles ha pubblicato una dimostrazione completa dell'ultimo teorema di Fermat. Utilizza vari strumenti matematici moderni, è lunga più di cento pagine ed è pienamente comprensibile solo ai pochi matematici che hanno le conoscenze tecniche necessarie. È interessante che Wiles, che era un matematico di fama, abbia tenuto segreto il suo tentativo di risolvere questo famoso problema. Dopo sei anni di lavoro, annunciò pubblicamente di aver trovato la dimostrazione. Ma poco dopo fu scoperto un errore in uno dei suoi ragionamenti. Il suo mondo fu distrutto... Dopo più di un anno, riuscì a correggere l'errore e gli specialisti del settore confermarono che la dimostrazione è completa. Nel 2016, all'età di sessantatré anni, Wiles è diventato il più giovane destinatario del Premio Abel, il più alto riconoscimento della matematica.

Senza dubbio, la matematica moderna sta ottenendo grandi successi. Tuttavia, permettetemi di concludere con alcune riflessioni critiche. Nel mondo attuale, compreso quello matematico, la competizione è sempre più diffusa. Si compete per progetti, promozioni, riviste, citazioni, conoscenze, collaborazioni... Le abilità sociali giocano oggi un ruolo sempre più importante nella carriera di un matematico. Ho la sensazione che il vero impegno per la matematica non sia così comune oggi come in passato e che la ricerca in matematica sia perseguita da un numero sempre maggiore di persone che non hanno un incentivo intrinseco per farlo. Si possono quindi trovare molti articoli nelle riviste di ricerca che possono essere tecnicamente impegnativi, ma non portano nuove idee e non hanno alcuna bellezza matematica.

Vedo la matematica come una vecchia e dignitosa signora. Così vecchia che cammina molto lentamente. È affascinata solo dalle idee veramente originali e veramente belle. Queste sono rare e non si presentano spesso. Non la impressioneremo con la mentalità del "di più e più veloce", forse penserà addirittura che siamo un po' infantili. Non so cosa pensi di me. Ma so che mi ha dato molto di più di quanto io possa darle in cambio.