Il progetto ArAl: un intreccio tra aritmetica e algebra

Lucia Stelli

The article presents the ArAl Project, a way for didactic innovation that believes the teaching of arithmetic in a pre-algebraic key. The aim is giving a vision of algebra as a language showing socio-constructive teaching methods starting from the exploration of appropriate problem situations. Giancarlo Navarra's book *Arithmetic and Algebra: an intertwined learning path from 5 to 14 years ago* is the leitmotif of the whole discourse.
Keywords: *ArAl Project*, *Arithmetic and algebric teaching methods*

Early algebra* e *Progetto ArAl

Dopo aver letto la prima parte dell'articolo di Matej Bresar "Pensando alla matematica", in cui l'autore ha demolito gli stereotipi sulla matematica e su chi fa ricerca matematica, ho pensato che una testimonianza di ciò che da anni la ricerca in didattica della matematica sta facendo per cambiare l'insegnamento tradizionale, potesse contribuire a guardare con fiducia al futuro della matematica scolastica.

La ricerca in didattica della matematica non è una novità in quanto a partire dagli anni Ottanta in varie Università Italiane sono stati creati nuclei di ricerca didattica che hanno visto numerosi insegnanti collaborare con docenti universitari al fine di integrare il piano della pratica e quello della teoria. Nel corso degli anni, per conciliare la razionalità matematica con gli aspetti psicologici, sociali, relazionali del contesto educativo, sono nate anche varie collane di libri rivolti in primis agli insegnanti. Tra queste spicca *Nuove Convergenze: strumenti per l'insegnamento della matematica*[1] curata dall'Unione matematica Italiana (UMI) e la sua Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM). La recente pubblicazione in questa collana del libro di Giancarlo Navarra *Aritmetica e algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni* mi ha spronato a scrivere del *Progetto ArAl*[2], avviato nella prima metà degli anni ottanta presso l'Università di

1. https://umi.dm.unibo.it/attivita-della-ciim/progetti-editorial/collana-nuove-convergenze/

2. http://www.progettoaral.it/

Modena e Reggio Emilia dal Gruppo di Ricerca in Educazione Matematica (GREM) diretto da Nicolina A. Malara[3]. Si tratta di un progetto che si colloca nella cornice dell'*Early algebra*, un filone di ricerca che si è sviluppato per rispondere all'esigenza di superare le tipiche difficoltà associate allo studio del formalismo algebrico da parte degli studenti che troppo spesso non controllano il significato degli oggetti che si trovano a manipolare.

La ricerca ha sottolineato l'importanza di favorire la costruzione di questi significati fin dai primi anni di scuola, a partire dall'infanzia e la primaria, con l'obiettivo di algebrizzare l'aritmetica. Con l'*Early algebra* si vuole dimostrare, a differenza di ciò che avviene nell'insegnamento tradizionale della matematica, in cui lo studente incontra l'algebra alla fine della scuola secondaria di primo grado, come sia possibile ed efficace iniziare molto prima l'avvio al pensiero algebrico.

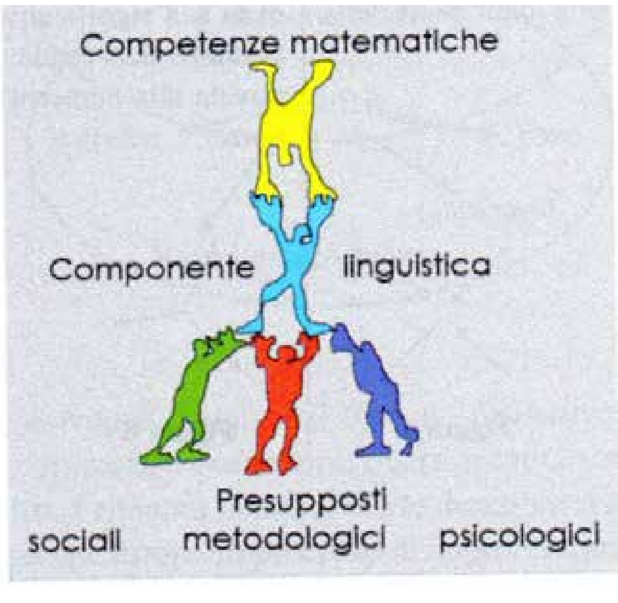
Quindi, non tanto un approccio precoce all'algebra quanto l'algebra degli inizi, per scoprire il volto algebrico di ciò che viene, normalmente, visto solo come aritmetica. L'obiettivo di fondo è quello di guidare i docenti verso il superamento della classica concezione procedurale dell'aritmetica (fare operazioni, cercare risultati) verso una concezione relazionale della stessa (punto di vista del rappresentare contrapposto al risolvere) che promuova gli aspetti metacognitivi e metalinguistici delle attività matematiche.

Si tratta quindi di costruire quelle strutture mentali necessarie per il futuro apprendimento del linguaggio algebrico, consentendo agli alunni di guardare l'aritmetica con occhi algebrici. Questo accade se l'attenzione viene spostata da attività tradizionali, meramente focalizzate sul processo di calcolo, sui seguenti temi caratterizzanti i diversi approcci attraverso i quali l'aritmetica può essere algebrizzata:

- guidare a vedere il generale nel particolare, lavorando su attività di esplorazione, congettura e argomentazione;
- stimolare l'esplicitazione di regolarità osservate (ad esempio quelle alla base delle costruzioni di successione);
- supportare l'interpretazione di procedure in termini concettuali;
- focalizzare l'attenzione sulle relazioni e sulla loro rappresentazione.

Il *Progetto ArAl* è stato oggetto di articoli, quaderni di lavoro, presentazione a convegni, seminari, corsi di formazione[4] e consta di un'imponente mole di materiali che potrebbe disorientare l'insegnante che si accosta al progetto. Per l'ampiezza di prospettive che apre può apparire labirintico e proprio per questo l'autore del libro si preoccupa per prima cosa di dare un sistema di riferimento che favorisca la comprensione del progetto e gli spostamenti al suo interno.

Basta dare un'occhiata all'indice per rendersi conto di questo. A una parte introduttiva in cui è presentato il lungo cammino del progetto e la sua struttura, seguono cinque parti, tutte che iniziano con le parole "Aspetti Chiave di carattere..." che nell'ordine si completano con: metodologico, sociale, psicologico, linguistico, matematico. Tale struttura viene rappresentata con una piramide umana in cui i ginnasti che la formano sono usati per marcare visivamente il percorso di lettura.



3. http://www.aracneeditrice.it/index.php/autori.html?auth-id=9053

4. https://www.youtube.com/watch?v=zjEgMyAIggw&ab_channel=AIRDM

Sarebbe troppo lungo entrare qui nel merito di tutti questi aspetti, per cui mi limito a fare alcuni esempi di attività per dare l'idea di cosa viene proposto e come viene condotto il lavoro in classe intrecciando tutte le componenti della piramide umana. L'idea sottesa è quella di partire dal vertice della piramide per fare emergere tutti gli elementi della sua impalcatura.

Descrizione di un'attività condotta con bambine/i di 5 anni

L'insegnante fa vedere ai bambini una fila di scatole colorate secondo il modulo blu-giallo-giallo-rosso con una delle scatole coperta da un panno e chiede qual è il colore di questa scatola. La risposta viene data velocemente:la scatola è gialla.

Ma l'insegnante non si accontenta del semplice *gialla* e chiede ai bambini di spiegare come hanno fatto a capire il colore, spostando la loro attenzione dal prodotto al processo e spingendoli ad argomentare la propria scelta. Ottiene risposte molto differenti:

a) Lì ci sono due scatole gialle (*l'alunna indica la seconda e la terza scatola*);

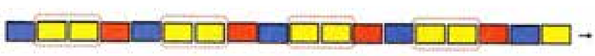
b) Tra la blu e la rossa (*l'alunno tocca le scatole che stanno all'inizio e alla fine di un modulo*) ci sono due gialle);

c) Lì (*l'alunno indica la seconda rossa prima di quella coperta*) prima di una rossa c'è una gialla, allora vicino a questa rossa (*indica la scatola dopo il panno*) c'è la gialla (*indica quella nascosta*);

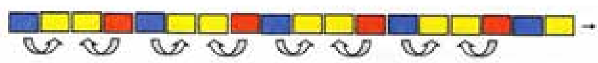
d) (*L'alunna man mano che parla, tocca le scatole cominciando dalla prima*) Blu gialla gialla rossa blu gialla gialla rossa blu gialla gialla! (*è chiaramente orgogliosa della scoperta e continua a sfiorare le scatole successive, rapita – momento per momento - dalla naturalalezza con cui si legano il pensiero, la parola, il gesto, la verifica*).

Le risposte permettono di individuare almeno quattro diverse percezioni della situazione da parte dei bambini che notano:

a) il ripetersi della coppia gialla-gialla



b) il ripetersi della relazione coppia di gialle fra una blu e una rossa



c) il ripetersi della coppia gialla-rossa

d)il ripetersi del modulo blu-gialla-gialla-rossa.

È questo un esempio di come la percezione giochi un ruolo importante nella costruzione dei concetti matematici. I primi tre bambini si sono concentrati su percezioni locali mentre la quarta bambina ha percepito globalmente la successione. La condivisione delle percezioni porta a due esiti positivi: ogni bambino affina la capacità di vedere con gli occhi dell'altro ampliando così il campo dei modi di guardare a quella realtà e riflette insieme agli altri sulla differenza tra percezioni locali e percezione globale.

Già si intuisce quanto la ricerca di regolarità sia un ambiente fertilissimo per la maturazione delle competenze in ambito aritmetico e algebrico. Vediamone uno sviluppo.

Altre attività con i moduli

Alla richiesta di esprimere in linguaggio matematico la strategia per trovare da quante perle la seguente collana è formata si raccolgono solitamente le due tipologie di spiegazioni: una che si serve della rappresentazione 2x8 + 3x8, e una, in minor misura, che ricorre a (2+3) x 8.

Ciò porterà a concettualizzare l'equivalenza 2x8 + 3x8 = (2+3) x 8, costituendo un approccio significativo alla proprietà distributiva. L'evoluzione dell'attività condurrà alla conquista del significato generale di questa scrittura e a una sua rappresentazione come a x c + b x c = (a + b) x c che porterà alla comprensione della proprietà distributiva.

L'attività con i moduli, intrecciando i linguaggi grafico, naturale e matematico, si presta poi a spingere la percezione oltre la rappresentazione grafica visibile.
Ad esempio di fronte a una successione come questa di modulo 4, come fare a stabilire quale figura ci sarà al 75° posto?

La risposta è un rettangolo, ma da quale ragionamento scaturisce?
Dalla divisione 75:4 ricaviamo che 75 elementi comprendo 18 moduli completi e 3 elementi del 19° modulo incompleto, in linguaggio matematico: 75 = 4 x 18 +3.
Purtroppo, sebbene sottolineato dalle Indicazioni Nazionali e da decenni riconosciuto e promosso dalla ricerca, il ruolo assegnato ai linguaggi nella costruzione delle competenze in ambito matematico viene spesso trascurato dagli insegnanti.

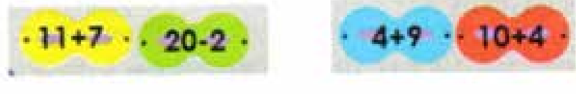
Rappresentazione canonica/non canonica del numero

A proposito del ruolo dei diversi linguaggi, la rappresentazione canonica/non canonica del numero, che può essere introdotta a partire dalla classe prima della scuola primaria, è una delle competenze fondamentali per costruire una visione relazionale della matematica.
Chiunque pensi a un numero pensa a una quantità espressa mediante la sua rappresentazione posizionale in base dieci che dà nome al numero, ed è per questo che essa è detta canonica; ad esempio 12 si chiama *dodici*.
Questa rappresentazione è opaca di significati nel senso che dice poco di sé. Un numero tuttavia può essere rappresentato in infiniti altri modi, ognuno dei quali ha un determinato senso proprio nel processo soggiacente: 7+5, 13-1, 4x3, 5x3-3, sono rappresentazioni non canoniche del numero 12 e ampliano il campo delle informazioni che lo riguardano, sono cioè trasparenti in termini di significati, in quanto permettono di cogliere proprietà del numero che la rappresentazione canonica non mostra. Per esempio la rappresentazione 4x3 rende evidente che 12 è multiplo di 4 e di 3.

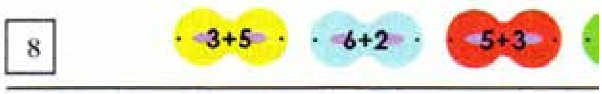
Le diverse rappresentazioni non canoniche di un numero permettono di fare emergere il ruolo svolto dal simbolo di uguaglianza come rappresentazione di una relazione (significato relazionale) contrapponendolo significato tradizionale del calcolare (significato procedurale).
Data l'importanza del tema uguaglianza, nel libro viene dedicato un intero capitolo a questo tema. Dalla sua lettura emerge come una didattica tradizionale generi misconcezioni destinate a consolidarsi sempre più nel tempo e come con un approccio diverso si possa anche con alunni molto giovani costruire il significato relazionale del segno '='.
La concezione del risultato a destra dell''=' si radica negli alunni fin da prima del loro ingresso nella scuola, da quando avvertono l'approvazione degli adulti per la capacità di dire *quanto fa* un certo calcolo. Educati a una logica esecutiva, non sono stati portati a interrogarsi sul significato dell'uguale. Ecco che fin dalla prima classe della scuola primaria è importante costruire un imprinting relazionale che andrà costantemente vitalizzato adattandolo a nuove circostanze.

Significato relazionale del segno di uguaglianza: il gioco delle mascherine

Si può cominciare con il *Gioco delle mascherine*, una festa organizzata dai numeri, proprietari delle maschere, inizialmente indossate dagli stessi alunni. Ogni maschera porta scritta una rappresentazione di un numero in forma non canonica, e si chiede agli alunni di riconoscere le mascherine che nascondono numeri fratelli, riconducibili cioè allo stesso numero.



Ad esempio le mascherine 11+7 e 20-2 nascondono numeri fratelli e appartengono alla famiglia 18, mentre le mascherine 4+9 e 10+4 non sono numeri fratelli. A questa fase di riconoscimento di numeri fratelli segue poi la richiesta di mettere sulla stessa panca identificata dal numero scritto in forma canonica le mascherine quando sono stanche. A questo punto si chiede agli alunni di scrivere un messaggio a un bambino straniero che non conosce l'italiano (nel progetto è stato scelto di chiamarlo Brioshi) per fargli capire chi



sono i numeri fratelli. Brioshi non conosce l'italiano, ma capisce molto bene il linguaggio della matematica.
Dalla scrittura iniziale

3+5=8, 6+2=8, 5+3=8

alla fine la situazione rappresentata per Brioshi sarà:

8 = 3+5=6+2=5+3

Il compito comporta i seguenti passaggi:
a) capire la consegna da "tradurre per Brioshi";
b) esprimere la relazione fra rappresentazioni di numeri;
c) trovare i simboli matematici adatti;
d) confrontare le proprie proposte con quelle dei compagni;
e) interpretarle e commentarle.
Si inizia così a gettare le premesse per controllare i significati delle formule e delle loro trasformazioni.

Dal linguaggio naturale a quello algebrico
Numerose sono le attività rivolte a classi più avanzate dalle quali emerge che l'algebra dovrebbe essere insegnata come un nuovo linguaggio. Il percorso avviato nella scuola primaria trova infatti nella secondaria di primo grado il contesto più fertile per essere sviluppato e messo a frutto.
Ecco un esempio di come traghettare gli alunni dal linguaggio naturale a quello algebrico.
L'insegnante sceglie di lavorare sulla somma fra un numero e il suo successivo e propone le seguenti tre scritture. Chiede poi di esprimere in linguaggio naturale una caratteristica comune:
3+4 35+36 578+579
È probabile che gli alunni le interpretino da un punto di vista procedurale e dicano che la caratteristica è quella di "Aggiungere a un numero quello che viene subito dopo" e calcolino i risultati 7, 71, 1157. Per loro il discorso finirebbe qui. Ma qualcuno potrebbe anche dire che le tre scritture rappresentano "la somma fra un numero e il suo successivo". Si può allora chiedere di utilizzare forme non canoniche per esprimere "il numero successivo" pervenendo alle seguenti scritture che esprimono in modo trasparente la relazione tra i numeri di ogni coppia:
3+(3+1) 35+(35+1) 578+(578+1).
Un primo trattamento porta poi a togliere le parentesi:
3+3+1 35+35+1 578+578+1.
Un secondo trattamento porta a riscrivere le somme di numeri uguali in forma moltiplicativa come il loro doppio:
2x3+1 2x35+1 2x578+1.
L'osservazione delle regolarità in queste scritture indurrà gli alunni a vedere in modo nuovo la somma di due numeri uno successivo dell'altro e ad esplicitarla:
3+4=2x3+1 35+36=2x35+1
578+579=2x578+1.
Si può così produrre una definizione di carattere generale che potrà essere: "la somma fra un numero e il suo successivo è uguale alla somma del doppio del numero stesso e 1", o anche: "la somma fra un numero e il suo successivo è il successivo del doppio del numero stesso".
Va da sé che tutti i passaggi del ragionamento debbano essere il risultato di una discussione con e fra i ragazzi in modo che siano loro stessi a pervenire alle due formulazioni. Con gli alunni più grandi si possono anche ricercare le ragioni che giustificano questa uguaglianza sul piano matematico (n è un numero naturale). Sono necessari tre passaggi.
1. La scrittura n+(n+1) a sinistra dell'uguale si può riscrivere come (n+n) +1 applicando la proprietà associativa, ottenendo n+(n+1) = (n+n) +1.
2. Per la definizione di moltiplicazione n+n=2xn
3. Per il principio in base al quale se si sommano cose uguali a cose uguali si ottengono cose uguali possiamo scrivere: (n+n) +1=2xn+1.
Un uso attento del linguaggio naturale e di quello matematico può quindi mediare il passaggio dal linguaggio verbale a quello simbolico dell'algebra.

L'insegnante, lungo questa progressiva riflessione sul linguaggio che tende alla formalizzazione, promuove la verbalizzazione, l'argomentazione, la discussione, la traduzione, il confronto fra le rappresentazioni e le interpretazioni elaborate dagli alunni, educa in sintesi alla conquista di competenze matematiche.

Agli insegnanti non resta quindi che avvicinarsi al mondo della ricerca in didattica della matematica e intanto attingere a piene mani alla documentazione del *Progetto ArAl* per imparare nuove strade lungo cui muoversi e far sì che gli studenti si approprino degli strumenti adeguati a comprendere e amare la matematica.

Piero Bianucci
Creativi si nasce o si diventa?
Edizioni Dedalo, Bari, 2022

"La creatività non è assegnabile a funzioni specifiche del cervello, benché alcune prevalgano in certe fasi del processo creativo. È il pensiero fluido – laterale e divergente – quello che riconfigura il problema, capovolge il punto di vista e scatena il gioioso istante Eureka! Il solito Einstein lo espresse così: "la creatività è un cervello che si diverte".
Cos'è la creatività? Una dote innata o qualcosa da stimolare?
Tra storia, neuroscienze, arte e umorismo, Piero Bianucci esplora uno degli aspetti più affascinanti e misteriosi della nostra mente. L'autore, scrittore e giornalista scientifico, collabora con *La Stampa*, la Rai e la radio svizzera, con questo testo breve e vivace esplora il tema in modo chiaro, divulgativo quanto basta per tenere l'attenzione, senza rinunciare alle spiegazioni necessarie, partendo dalla memoria e dall'intelligenza, soffermandosi brevemente sull'anatomia e sulle funzioni del cervello per giungere alle caratteristiche delle persone e degli ambienti creativi. Dall'arte alla scienza, la creatività nelle sue molteplici espressioni sembra essere il vero tratto distintivo della specie umana. Mentre la cultura è importante ma non indispensabile alla riuscita artistica personale, il carattere sommatorio della scienza fa sì che conoscere bene l'esistente sia essenziale perché la grande intuizione individuale è rara, mentre la regola è una stretta collaborazione. La capacità di meravigliarsi, la curiosità e uno sguardo insolito sulle cose sono essenziali, accompagnati però dal lavoro di ricerca costante e da un uso fecondo dell'errore.
La memoria gioca un ruolo importante, dato che "soluzioni creative richiedono al cervello di integrare inconsciamente le informazioni, permettendo così di vedere il problema sotto una nuova luce", come scrive Kandel. A proposito dell'intelligenza, della quale occorrerebbe discutere sia l'articolata definizione che la problematica misurazione, mentre "è verosimile che chi esprime una vivace creatività scientifica abbia un quoziente intellettivo elevato", sarebbe interessante una ricerca che appurasse quanto sono creative le persone con un quoziente intellettivo alto.
Nell'esplorazione del cervello si sono fatti enormi progressi. La parola chiave è connettoma, la rete che congiunge i neuroni. Ereditiamo genoma e connettoma dai genitori, ma mentre il primo è stabile, il secondo conserva la sua flessibilità per tutta la vita, riconfigurandosi attraverso le esperienze che fanno di noi le persone che siamo.
Genitori e scuola hanno dunque un'enorme responsabilità nel preservare e incoraggiare i bambini, che sono naturalmente dotati di pensiero divergente connotato da gratuità, atteggiamento giocoso, allegria e irriverenza. La scuola spesso rema contro, quando presenta i problemi già confezionati e chiede soluzioni cristallizzate, che nascondono i percorsi di ricerca e di scoperta, costruendo così un abito mentale da indossare automaticamente in ogni situazione.
Sembra proprio che creativi un po' si nasce e un po' si diventa. E allora la scuola dovrebbe insegnare la creatività e non soffocarla, rivalutando mani e piedi che sono prolungamenti del cervello. Decine di studi provano infatti che l'attività fisica stimola nel cervello le aree della creatività e dunque occorrono laboratori di fisica e chimica, spazi e tempi per la musica e la ginnastica.
Tuttavia, poiché la plasticità del cervello sembra essere simile a quella dell'argilla, gli stili di vita sono fondamentali e non è mai troppo tardi per sviluppare la creatività e la "riserva cognitiva" a cui attinge.

Maria Castelli